Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 10
Abgabe: 25.01.2022

Aufgabe 1 (14 Punkte)**.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *pseudo-konvergente Folge* aus dem bewerteten Körper (K,ν), das heißt, dass $\nu(a_{m+1}-a_m) > \nu(a_m-a_n)$ für alle $n<m$ aus $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass$\nu(a_k-a_m) > \nu(a_m-a_n)$ für $n<m<k$.

(b) Zeige, dass die Folge $\{\nu(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ entweder streng monoton wachsend oder schließlich konstant ist.

Gegeben eine pseudo-konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist a aus K ein *Pseudo-Limes*, falls $\nu(a-a_n) = \nu(a_n-a_{n+1})$ für jedes n aus $\mathbb{N}$.

(c) Wir nehmen an, dass die Bewertung ν diskret ist. Zeige, dass jede pseudo-konvergente Folge Cauchy ist. Des Weiteren zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach a konvergiert, wenn a ein Pseudo-Limes ist.

(d) Für eine beliebige Bewertung ν, falls die Folge $\{\nu(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, zeige, dass a aus K genau dann ein Pseudo-Limes ist, wenn $\nu(a) > \nu(a_n)$ für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist.

(e) Wir nehmen nun an, dass 0 kein Pseudo-Limes ist aber a ein Pseudo-Limes ist. Zeige, dass $\nu(a) = \nu(a_n)$ für n aus $\mathbb{N}$ groß genug.

(f) Betrachte die Gauß Erweiterung w auf $\mathbb{Q}(T)$ mit $w(q) = (\nu_p(q), 0)$ und $w(T) = (0,1)$ in $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ mit der antilexikographischen Ordnung (so $(n_1,m_1) <_{\text{antilex}} (n_2,m_2)$, falls $m_1 < m_2$ oder $m_1 = m_2$, aber dann ist $n_1 < n_2$). Beschreibe alle Pseudo-Limites der Folge $(p^n+T)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Sei p eine Primzahl.

(a) Zeige, dass ein normiertes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_p$ genau dann irreduzibel über $\mathbb{Z}_p$ ist, wenn es über $\mathbb{Q}_p$ irreduzibel ist.

Hinweis: Nutze die Gauß Erweiterung w auf $\mathbb{Q}_p(T)$ mit $w(T)=0$.

(b) Schließe daraus, dass $\mathbb{Q}_p$ das *Eisensteinkriterium* erfüllt: gegeben ein normiertes Polynom $f = T^n + \sum\limits_{i\leq n-1} a_iT^i$ über $\mathbb{Z}_p$ derart, dass jedes a_i durch p in $\mathbb{Z}_p$ teilbar ist, aber p^2 den Koeffizient a_0 in $\mathbb{Z}_p$ nicht teilt, dann ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}_p$.

(c) Seien nun $p\neq 2$ und η eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p^{alg}$. Bestimme das Minimalpolynom von η über $\mathbb{Q}_p$.

Hinweis: Betrachte das Polynom $P(T) = \frac{T^p-1}{T-1} = 1+T+\ldots+T^{p-1}$. Warum ist $P(T+1)$ irreduzibel?

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.30 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 15 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Das Blatt kann zu zweit eingereicht werden.